مجله مهندسی مکانیک مدرس، مهر 1394، دوره 15، شماره 7، ص‌ص 53-60

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

شبیه‌سازی و کنترل مود لغزشی - تطبیقی ربات تعادلی دوچرخ با معادلات دینامیکی بهبود یافته

امیرحسین شامخی[1*]، آزاده شریعتی[2]، علی غفاری[3]، سینا امیدفر[4]

1- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

2- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

3- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

4- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

* تهران، صندوق پستی 1999-19395، shamekhi@kntu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 23 اسفند 1393

پذیرش: 07 اردیبهشت 1394

ارائه در سایت: 28 اردیبهشت 1394

کلید واژگان:

ربات تعادلی دوچرخ

معادلات دینامیکی بهبودیافته

کنترلر مود لغزشی - تطبیقی

تئوری پایداری لیاپانوف

قضیه مجموعه‌های ناوردا

چکیده

در این مقاله، کنترل ربات تعادلی دوچرخ بر اساس مدل بهبود یافته ربات ارائه شده است. مسأله ربات تعادلی دو چرخ به دلیل وجود قیود غیر هولونومیک، کمبود عملگر و ناپایداری ذاتی مسأله‌ای جالب و چالش برانگیز در علم دینامیک و کنترل است. در پژوهشی که پیش از این توسط نویسندگان مقاله صورت گرفته، معادلات دینامیکی بهبود یافته ربات دوچرخ محاسبه و اعتبارسنجی شده است که تفاوت آن با مدل‌های پیشین وجود یک ترم غیرخطی است. نشان داده شده که اگر ربات در مسیر غیر مستقیم حرکت کند، وجود این ترم غیرخطی در طراحی کنترلر تأثیر بسزایی دارد. در این مقاله از کنترلرهای مود لغزشی - تطبیقی بر مبنای دینامیک صفر استفاده شده است. این کنترلر به گونه‌ای طراحی شده است که می‌تواند بدنه ربات را در وضعیت تعادل نگاه دارد، در حالی که خطای شتاب و موقعیت رو به جلو را صفر می‌کند و سرعت دورانی مطلوب را نیز برای ربات فراهم می‌سازد. در ادامه، با استفاده از تئوری پایداری لیاپانوف، لم باربالت و قضیه مجموعه‌های ناوردای لاسال اثبات شده، که سیستم مدار بسته به صورت مجانبی فراگیر پایدار است. نتایج شبیه‌سازی‌ها کارآمدی کنترلر ارائه شده را نشان می‌دهد.

Simulation and control system design for a two-wheeled self-balancing robot via adaptive sliding-mode technique using modified dynamical model

Amir Hosein Shamekhi*, Azadeh Shariati, Ali Ghaffari, Sina Omidfar

Department of Mechanical Engineering, K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran
* P.O.B. 19395-1999 Tehran, Iran, shamekhi@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 14 March 2015
Accepted 27 April 2015
Available Online 18 May 2015

Keywords:
Two-Wheeled Self-Balancing Robot
Modified Dynamical Model
Adaptive-Sliding Mode Controller
Lyapunov Theorem
Invariant Set Theorem

ABSTRACT

The problem of two- wheeled self-balancing robot is an interesting and challenging problem in control and dynamic systems. This complexity is due to the inherent instability, nonholonomic constraints, and under-actuated mechanism. Dynamical model of two-wheeled self- balancing robot can be presented by a set of highly coupled nonlinear differential equations. Authors, previously, developed the modified dynamical equations of the robot. The governed equations have some differences with the commonly used equations. The main difference is due to the existence of a nonlinear coupling term which had been neglected before. In this paper an adaptive sliding mode controller based on the zero dynamics theory was used. The controller objective is to drive the two-wheeled self-balancing robot to the desired path as well as to make the robot stable. By some simulations the behavior of the robot with the proposed controller is discussed. It is shown that if the nonlinear coupling term is ignored in designing the controller, the controller cannot compensate its effect. Using Lyapunov theorem and the invariant set theorem, it is proved that the errors are globally asymptotically stable.

1- مقدمه

در سال‌های اخیر، مطالعه بر روی ربات‌های تعادلی دوچرخ بسیار گسترش یافته و تحقیقات بسیاری بر روی طراحی، دینامیک و کنترل آنها انجام شده است. مسأله ربات تعادلی دوچرخ به دلیل وجود قیود غیرهولونومیک، کمبود عملگر و ناپایداری ذاتی، مسأله‌ای چالش برانگیز در علم دینامیک و کنترل است. برخی از رباتهای چرخدار عملی عبارتند از JOE [1]، B_2 [2] و محصول تجاری سگوی [3]. چنین سیستم‌هایی مانورپذیری بالایی دارند و می‌توانند به مکان‌هایی بروند که تنها عابرین پیاده می‌توانند در آنجا تردد کنند. معادلات دینامیکی ربات‌های تعادلی دوچرخ به دلیل توانایی حرکت چرخ‌ها بر روی صفحه افقی و ناپایداری ذاتی بدنه بسیار وابسته و غیرخطی است. گریسر

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

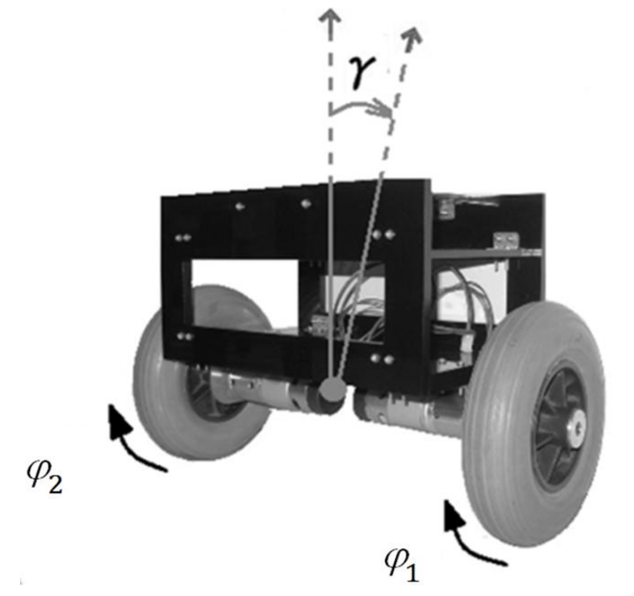
Please cite this article using:
A. H. Shamekhi, A. Shariati, A. Ghaffari, S. Omidfar, Simulation and control system design for a two-wheeled self-balancing robot via adaptive sliding-mode technique using modified dynamical model, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 7, pp. 53-60, 2015 (In Persian)

و همکاران به مدل‌سازی دینامیکی سیستم به روش نیوتن اویلر پرداخته‌اند و برای طراحی کنترلر معادلات بدست آمده را حول نقطه کاری خطی کرده‌اند [1]. سلمو و آنجل معادلات دینامیکی ربات را با در نظر گرفتن زوایای پیچ و دوران به عنوان متغیرهای حالت بدست آورده‌اند [4]. گوهر و همکاران با استفاده از روش لاگرانژ معادلات دینامیکی ربات تعادلی دوچرخ را محاسبه و درجات آزادی اضافی را نسبت به کار محققان پیشین به سیستم اضافه کردند [5]. تحقیقات بسیاری نیز بر روی مسأله کنترل و پایداری این دسته از ربات‌ها صورت گرفته است. جونگ و همکارانش ربات آی‌پنتر را از روش پسخوراند متغیرهای حالت کنترل کردند [6]. همچنین ژو از روش LQR برای کنترل ربات دوچرخ استفاده کرده است [7]. کانگ برای کنترل ربات تعادلی، یک کنترلر مود لغزشی مرتبه کامل ارائه داده است. وی معادلات دینامیکی را بعد از خطی‌سازی به فرم فضای حالت برده و یک کنترلر مقاوم برای پایدارسازی و حذف اغتشاشات طراحی کرد [8]. لین یک روش تطبیقی مقاوم برای کنترل زاویه انحراف ربات از وضعیت تعادل ارائه داد. در پژوهش وی معادلات دینامیکی بعد از ساده‌سازی در دو قسمت مجزا از هم نوشته شده و برای هر قسمت کنترلر مقاوم تطبیقی طراحی شده است و پارامترهای قوانین کنترلی براساس تئوری پایداری لیاپانوف به دست آمده است [9]. سو [10] یک ساختار کنترلی هوشمند برای کنترل ربات تعادلی خود ارائه داد. در الگوریتم کنترلی پیشنهادی وی از یک استنتاجگر فازی به عنوان کنترلر اصلی و از یک شبکه عصبی به عنوان کنترلر کمکی استفاده شده است. رن و همکاران [11] از کنترلی که ترکیبی از یک کنترلر تناسبی-انتگرالی-مشتقی و یک شبکه عصبی است برای کنترل ربات خود استفاده کرده‌اند. در کنترلر ارائه شده ضرایب به وسیله یک شبکه عصبی تنظیم می‌شود. مداحی، شامخی و غفاری [12] با استفاده از روش انتگرال توسعه‌یافته، تابع لیاپانوف مناسب را برای ربات دوچرخ بدست آوردند و سپس کنترلری بر مبنای تئوری لیاپانوف طراحی کردند. از آنجا که سیگنال کنترلی حاصل دارای عباراتی ناپیوسته بود، لذا شرایط حل فیلیپاف برای بررسی وجود، یکتایی و هموار بودن رفتار سیستم در هنگام برخورد با صفحات ناپیوستگی مورد تحلیل قرار گرفت و پایداری مجانبی سیستم کنترلی با استفاده از تئوری پایداری لیاپانوف و قضیه مجموعه‌های ناوردا اثبات شد. لاریمی و موسویان [13،14] برای کنترل و حفظ تعادل ربات، یک مکانیزم جدید پایدارسازی برای ربات دوچرخ ارائه کردند. در مکانیزم ارائه شده، از یک چرخ عکس‌العملی استفاده شده است، به این صورت که برای حفظ تعادل از عکس‌العمل ناشی از اعمال گشتاور موتور به این چرخ استفاده می‌شود. کیم[1] و همکاران معادلات دینامیکی ربات سه درجه آزادی را به روش کِین[2] بدست آوردند [15].

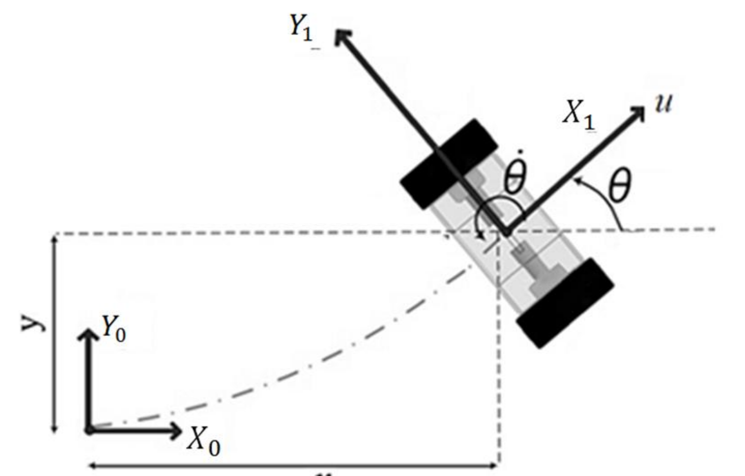
غفاری، شریعتی و شامخی معادلات دینامیکی ربات تعادلی دوچرخ را یکبار دیگر بدست آورده و آن را معادلات بهبودیافته نامیدند. از آنجا که معادلات کیم مرجع اصلی پژوهشگران برای اهداف کنترلی می‌باشد، نویسندگان معادلات خود را با معادلات کیم مقایسه نموده و نشان دادند که در معادلات بهبودیافته ترمی وجود دارد که در معادلات کیم و سایر محققان نیامده است. وجود این ترم غیرخطی و وابسته که ترم بهبودیافته نامیده شده، و همچنین صحت معادلات دینامیکی، با بدست آوردن معادلات با دو روش کِین و لاگرانژ نشان داده شده است. همچنین با ثابت ماندن تابع انرژی درغیاب نیروهای غیرپایستار برای مدل بهبودیافته، یک بار دیگر صحت معادلات و شبیه‌سازی‌ها اثبات شده است [16،17]. یو و همکاران [18] با استفاده از مدل دینامیکی [1] به کنترل مود لغزشی- تطبیقی ربات دوچرخ پرداختند. در مقاله حاضر با الهام از کنترلر یو و در راستای پژوهش [16،17]، با اعمال یک کنترلر مود لغزشی- تطبیقی نشان داده خواهد شد که اگر ترم بهبودیافته در طراحی کنترلر در نظر گرفته نشود، تأثیر بسزایی در رفتار سیستم مدار بسته خواهد داشت. کنترلر حاضر به‌گونه‌ای طراحی شده است که می‌تواند بدنه ربات را در وضعیت تعادل نگاه دارد و کنترل دورانی مطلوب را نیز برای ربات برآورده سازد. در ادامه با استفاده از تئوری پایداری لیاپانوف، لم باربالت و قضیه مجموعه‌های ناوردا لاسال، اثبات خواهد شد که سیستم مدار بسته به صورت مجانبی فراگیر پایدار می‌باشد. نتایج شبیه‌سازی‌ها کارآمدی کنترلر ارائه شده را نشان می‌دهند. مقاله حاضر دارای سرفصل‌های اصلی زیر است: بخش اول مقاله به مقدمه‌ای راجع به رباتهای تعادلی دوچرخ اختصاص داشت. در بخش دوم توصیف اجمالی از سیستم آورده شده است و در بخش سوم به طراحی کنترلر پرداخته می‌شود. شبیه‌سازی‌ها در بخش چهارم و در نهایت جمع‌بندی نتایج در بخش پنجم مقاله انجام خواهد شد.

2- توصیف سیستم

ربات تعادلی دوچرخی که در این مقاله بررسی می‌شود، یک بدنه است که بر روی یک محور نصب شده و شامل دو چرخ می‌باشد. عملگرهای ربات دو موتور DC هستند که به چرخها متصل هستند. این سیستم سه درجه آزادی دارد. دو درجه آزادی به حرکت ربات در صفحه اختصاص داشته و درجه آزادی سوم زاویه انحراف بدنه از حالت عمود می‌باشد که مانند یک پاندول معکوس عمل می‌کند. در شکل‌های 1 و 2 ربات تعادلی دوچرخ ساخته شده در قطب رباتیک و کنترلِ دانشکده مهندسی مکانیکِ دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی و متغیرهای حالت آن مشاهده می‌شود.



شکل 1 نمایش ربات تعادلی دوچرخ ساخته شده در قطب رباتیک و کنترل دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی



شکل 2 نمای بالای ربات تعادلی دوچرخ ساخته شده در قطب رباتیک و کنترل دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی به همراه نمایش متغیرهای حالت

1- Kim
2- Kane's approach

متغیرهای حالت اولیه سیستم بصورت $\left[x, y, \theta, \gamma, \varphi_1, \varphi_2\right]^{\mathrm{T}}$ تعریف می‌شود که در آن x و y موقعیت سیستم (نقطه میانی بین دو چرخ) در صفحه افقی، θ زاویه انحراف بدنه از محور x، γ انحراف بدنه از وضعیت تعادل (که از محور z اندازه‌گیری می‌شود) و متغیرهای φ_1 و φ_2 به ترتیب زوایای دوران چرخ اول و دوم می‌باشند. پارامترهای بدنه دارای زیرنویس 'ch' و پارامترهای چرخ دارای زیرنویس 'w' می‌باشند. حرکت ربات دوچرخ با یک مجموعه از معادلات دیفرانسیلی رسته دو بیان می‌شود. فرض‌های زیر برای مدل‌سازی سیستم در نظر گرفته می‌شوند:

- بدنه سیستم حول صفحات X_1Z_1 و Y_1Z_1 متقارن در نظر گرفته شده است.
- از لغزش چرخ‌ها صرف‌نظر شده است.

در مراجع [17،16] معادلات دینامیکی بهبودیافته ربات تعادلی دوچرخ توسط نویسنده به دو روش کِین و لاگرانژ بدست آمده است. معادلات دینامیکی بدست آمده، با فرض‌های مشابه، از هر دو روش کاملاً یکسان است. یکسانی معادلات بدست آمده با هر دو روش کِین و لاگرانژ، صحت آنها را اثبات می‌کند. معادلات بهبودیافته با در نظر گرفتن اصطکاک لغزشی بین چرخها و زمین و اصطکاک لغزشی داخلی به صورت روابط (1) می‌باشند:

$$
\begin{aligned}
&(3m_w + m_{ch})\dot{u} + h\, m_{ch}\big(\ddot{\gamma}\cos\gamma - \dot{\gamma}^2\sin\gamma \\
&\qquad - \dot{\theta}^2\sin\gamma\big) = \frac{1}{r_w}(\tau_1 + \tau_2) \\
&\big[2\big(m_w l^2 + I_{2_w}\big) + I_{xx_{ch}}\sin^2\gamma + m_{ch}h^2\sin^2\gamma \\
&\qquad + I_{zz_{ch}}\cos^2\gamma + m_w l^2\big]\ddot{\theta} \\
&\qquad + \big(m_{ch}h^2 + I_{xx_{ch}} \\
&\qquad - I_{zz_{ch}}\big)\sin 2\gamma\ \dot{\theta}\dot{\gamma} \\
&\qquad + m_{ch}h\sin\gamma\,\dot{\theta}\,u \\
&\qquad = -\frac{l}{r_w}\tau_1 + \frac{l}{r_w}\tau_2 \\
&\big(I_{yy_{Ch}} + m_{ch}h^2\big)\ddot{\gamma} + m_{ch}h\cos\gamma\,\dot{u} \\
&\qquad + \frac{1}{2}\big[I_{xx_{ch}} + m_{ch}h^2 \\
&\qquad - I_{zz_{ch}}\big]\sin 2\gamma\,\dot{\theta}^2 - m_{ch}gh\sin\gamma \\
&\qquad = -\tau_1 - \tau_2
\end{aligned}
\tag{1}
$$

با مقایسه معادلات بهبودیافته با معادلات کیم [15] که مرجع اصلی معادلات دینامیکی ربات تعادلی دوچرخ در بسیاری از منابع می‌باشد، مشخص می‌شود که مهمترین اختلاف مدل بهبودیافته و مدل‌های مرسوم، ترم غیرخطی و وابسته '$m_{ch}h\dot{\theta}\,u\sin\gamma$' است. در بخش بعدی اهمیت این ترم در طراحی کنترلر نشان داده خواهد شد. مقادیر عددی پارامترهای ربات و تعاریف آنها در جدول 1 آمده است.

3- طراحی کنترلر

هدف از طراحی کنترلر، بدست آوردن قوانین کنترلی است که بدنه ربات را در وضعیت تعادل نگاه دارد و سرعت زاویه دورانی سیستم را نیز کنترل نماید، در این مقاله، به دلیل مسأله کمبود عملگر کنترل سرعت روبه جلو با پروفیلی مشخص مدنظر نمی‌باشد. برای طراحی کنترلر، با انتخاب متغیرهای حالت به صورت $x = [x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4\ \ x_5\ \ x_6]^{\mathrm{T}} = [\gamma\ \xi\ \ \theta\ \ \dot{\gamma}\ \ u\ \ \dot{\theta}]$ معادلات دینامیکی ربات تعادلی دوچرخ یعنی معادلات (1) را می‌توان به شکل روابط (2) بازنویسی کرد:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_4 &= \Lambda_\gamma x_6^2 + \Psi_\gamma x_4^2 + X_\gamma(T_1 + T_2) + \Phi_\gamma g \\
\dot{x}_5 &= \Lambda_u x_6^2 + \Psi_u x_4^2 + X_u(T_1 + T_2) + \Phi_u g \\
\dot{x}_6 &= \Lambda_\theta\ x_5x_6 + \Psi_\theta\ x_4x_6 + X_\theta(T_1 - T_2)
\end{aligned}
\tag{1-2}
$$

که در آن Λ_u، Ψ_u، X_u، Φ_u ، Λ_γ، Ψ_γ، X_γ، Φ_γ، Λ_θ، Ψ_θ و X_θ به صورت زیر تعریف شده‌اند.

جدول 1 پارامترهای ربات

خصوصیت	واحد	مقدار	تعریف
τ_1, τ_2	$(\mathrm{kgm^2/s^2})$		گشتاور اعمالی به چرخ چپ و راست توسط موتورها
u	(m/s)		سرعت خطی رو به جلوی ربات
ξ	(m)		جابجایی ربات در راستای سرعت u
θ	(rad)		زاویه بدنه حول Z_1 نسبت به محور X_0
γ	(rad)		زاویه انحراف بدنه از حالت قائم
φ_1, φ_2	(rad)		زوایای دوران چرخها
X, Y	(m)		موقعیت ربات در صفحه افقی
m_{ch}	(kg)	3/99	جرم بدنه
m_w	(kg)	1/064	جرم چرخها
$I_{yy_{Ch}}$	$(\mathrm{kg.m^2})$	0/043	ممان اینرسی بدنه نسبت به محور $Y_{3_{ch}}$
$I_{xx_{ch}}$	$(\mathrm{kg.m^2})$	0/068	ممان اینرسی بدنه نسبت به محور $X_{3_{ch}}$
$I_{zz_{ch}}$	$(\mathrm{kg.m^2})$	0/044	ممان اینرسی بدنه نسبت به محور $Z_{3_{ch}}$
I_{1_w}	$(\mathrm{kg.m^2})$	0/009	ممان اینرسی چرخها نسبت به محور X_{4_w}
I_{2_w}	$(\mathrm{kg.m^2})$	0/043	ممان اینرسی چرخها نسبت به محور Y_{4_w}
g	$(\mathrm{m^2/s})$	9/81	شتاب جانب مرکز
r_w	(m)	0/1	شعاع چرخها
l	(m)	0/2	نصف فاصله دو چرخ
h	(m)	0/25	فاصله بین نقطه میانی خط متصل کننده دو چرخ و مرکز جرم بدنه

زیر تعریف شده‌اند.

$$
\begin{aligned}
&\Psi_u = -\frac{C_uA_\gamma}{A_uA_\gamma - B_uB_\gamma}, \quad \Lambda_u = \frac{B_uC_\gamma - A_\gamma C_u}{A_uA_\gamma - B_uB_\gamma}, \quad X_u = \frac{A_\gamma/r_w + B_u}{A_uA_\gamma - B_uB_\gamma}, \\
&\Phi_u = \frac{B_uD_\gamma}{A_uA_\gamma - B_uB_\gamma}, \quad \Psi_\gamma = \frac{B_\gamma C_u}{A_uA_\gamma - B_uB_\gamma}, \quad \Lambda_\gamma = \frac{-C_\gamma A_u + B_uC_u}{A_uA_\gamma - B_uB_\gamma}, \\
&\Phi_\gamma = -\frac{A_uD_\gamma}{A_uA_\gamma - B_uB_\gamma}, \quad X_\gamma = \frac{-\frac{B_\gamma}{r_w} - A_u}{A_uA_\gamma - B_uB_\gamma}, \quad \Lambda_\theta = \frac{B_\theta}{A_\theta}, \\
&X_\theta = \frac{D_\theta}{A_\theta}, \quad \Psi_\theta = \frac{C_\theta}{A_\theta},
\end{aligned}
\tag{2-2}
$$

و A_u، B_u، C_u، A_γ، B_γ، C_γ و D_γ، A_θ، B_θ، C_θ و D_θ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$
\begin{aligned}
&A_u = 3m_w + m_{ch}, \quad B_u = h\, m_{ch}\cos x_1, \\
&C_u = -h\, m_{ch}\sin x_1, \quad A_\gamma = I_{yy_{Ch}} + m_{ch}h^2, \\
&B_\gamma = h\, m_{ch}\cos x_1, \quad C_\gamma = \frac{1}{2}\big[I_{xx_{ch}} + m_{ch}h^2 - I_{zz_{ch}}\big]\sin 2x_1, \\
&D_\gamma = -h\, m_{ch}\sin x_1, \quad A_\theta = \big[2\big(m_w l^2 + I_{2_w}\big) + I_{xx_{ch}}\sin^2 x_1 \\
&\qquad + m_{ch}h^2\sin^2 x_1 \\
&\qquad + I_{zz_{ch}}\cos^2 x_1 \\
&\qquad + m_w l^2\big] \\
&B_\theta = -m_{ch}h\sin x_1, \quad C_\theta = -\big(m_{ch}h^2 + I_{xx\,ch} \\
&\qquad - I_{zz_{ch}}\big)\sin(2x_1) \\
&D_\theta = \frac{1}{r_w},
\end{aligned}
\tag{3-2}
$$

با تعریف $T_1 + T_2 = T_v$ و $T_1 - T_2 = T_w$ سیستم به دو زیرسیستم تبدیل می‌شود: زیرسیستم طولی و زیرسیستم دورانی. زیرسیستم طولی شامل دو معادله اول از معادلات دینامیکی سیستم است و زیر سیستم دورانی شامل سومین معادله از معادلات دینامیکی ربات تعادلی است. زیرسیستم طولی با ورودی کنترلی T_v به عنوان ورودی کنترلی و دو درجه آزادی با کمبود عملگر مواجه می‌باشد، درحالی که زیرسیستم دورانی با ورودی کنترلی T_w و یک درجه آزادی دارای عملگر به میزان کافی است. بنابراین زیرسیستم طولی با معادله (3) و زیرسیستم دورانی با معادله (4) نمایش داده می‌شوند.

$$\begin{cases} \dot{x}_5 = \Lambda_u x_6^2 + \Psi_u x_4^2 + X_u T_v + \Phi_u g \\ \dot{x}_4 = \Lambda_\gamma x_6^2 + \Psi_\gamma x_4^2 + X_\gamma T_v + \Phi_\gamma g \end{cases} \quad (3)$$

$$\ddot{\theta} = \Lambda_\theta x_5 x_6 + \Psi_\theta x_4 x_6 + X_\theta T_w \quad (4)$$

زاویه انحراف x_1 با گشتاور T_v و زاویه دورانی x_3 با گشتاور T_w کنترل می‌شود. درحالی که سرعت روبه‌جلوی x_5 را نمی‌توان به طور مستقیم کنترل کرد، زاویه انحراف بدنه مستقیماً تحت تأثیر x_5 است. در نتیجه کنترلر اصلی شامل دو زیر کنترلر می‌شود: کنترلر زیرسیستم- دورانی و کنترلر زیرسیستم طولی. برای طراحی کنترلر، خطاها به صورت رابطه (5) تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 - x_1^*, \quad & e_2 &= x_2 - x_2^*, \quad & e_3 &= x_3 - x_3^* \\ e_4 &= x_4 - x_4^*, \quad & e_5 &= x_5 - x_5^*, \quad & e_6 &= x_6 - x_6^* \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن $x^* = [x_1^*\ x_2^*\ \ x_3^*\ x_4^*\ x_5^*\ x_6^*]$ مقادیر مطلوب متغیرهای حالت هستند. برای حصول به هدف کنترلی معادلات دیفرانسیلی خطای زیرسیستم- طولی به صورت رابطه (6) تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} \dot{e}_2 = e_5 \\ \dot{e}_5 = \Lambda_u {x_6}^2 + \Psi_u {x_4}^2 + X_u T_v + \Phi_u g - \dot{x}_5^* \\ \dot{e}_1 = e_4 \\ \dot{e}_4 = \Lambda_\gamma {x_6}^2 + \Psi_\gamma x_4^2 + X_\gamma T_v + \Phi_\gamma g - \dot{x}_4^* \end{cases} \quad (6)$$

به طور مشابه معادله خطا برای زیرسیستم- دورانی به صورت رابطه (7) تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{e}_3 = e_6 \\ \dot{e}_6 = \Lambda_\theta x_5 x_6 + \Psi_\theta x_4 x_6 + X_\theta T_w \end{cases} \quad (7)$$

در این بخش روش‌های مود لغزشی- تطبیقی برای استخراج کنترل استفاده شده است. هدف کنترلی، کنترل ربات تعادلی دوچرخ روی مسیر دلخواه و پایدارسازی آن است. برای کنترل ربات از سه کنترل کننده مستقل از هم استفاده شده است. کنترل کننده مود لغزشی نسبت به اغتشاشات ناخواسته مقاوم است و خاصیت تطبیقی آن باعث می‌شود که نسبت به تغییر پارامترهای مکانیکی مقاوم باشد.

3-1- طراحی کنترلر حرکت طولی

در کنترل طولی، هدف کنترلی، کنترل زاویه انحراف بدنه بوسیله گشتاور T_v می‌باشد. حرکت طولی سیستم با انحراف بدنه از وضعیت تعادل کوپل می‌باشد. برای اعمال کنترلر مود لغزشی، سطح لغزشی را به صورت رابطه (8) تعریف می‌شود:

$$s_1 = \dot{e}_2 + c_1 e_2 \quad (8)$$

که در آن c_1 ثابت و مثبت است. مشتق سطح لغزشی نسبت به زمان را می‌توان به صورت رابطه (9) بدست آورد:

$$\dot{s}_1 = \ddot{e}_2 + c_1 \dot{e}_2 = \Lambda_u\, x_6^2 + \Psi_u\, x_4^2 + X_u T_v + \Phi_u g - \dot{x}_5^* + c_1 \dot{e}_2 \quad (9)$$

با اعمال قانون روش نمایی[1]، یعنی $\dot{s}_1 = -k_1 \mathrm{sgn}(s_1) - k_2 s_1$ برای رسیدن به سطح لغزش، کنترلر را می‌توان به صورت (10) طراحی کرد:

$$T_v = -\frac{\Lambda_u}{X_u} x_6^2 - \frac{\Psi_u}{X_u} x_4^2 - \frac{\Phi_u}{X_u} g + \frac{1}{X_u}(\dot{x}_5{}^* - c_1 \dot{e}_2 - k_1 \mathrm{sgn}\,(s_1) - k_2 s_1) \quad (10)$$

در رابطه (10)، k_1 و k_2 ثوابت طراحی و مثبت هستند. باید توجه کرد که پارامترهای مکانیکی که در کنترلر وجود دارند، کاربرد کنترلر را محدود می‌کنند به همین دلیل پارامترهای تطبیقی $\alpha_1 = \Lambda_u/X_u$، $\alpha_2 = \Psi_u/X_u$ و $\alpha_3 = \Phi_u g/X_u$ و $\alpha_4 = 1/X_u$ معرفی می‌شود که $\hat{\alpha}_i$ تخمینی از α_i $(i = 1,2,3,4)$ است. از آن گذشته، خطای تخمین به صورت $\tilde{\alpha}_i = \hat{\alpha}_i - \alpha_i$ تعریف می‌شود که به دلیل تغییرات آرام پارامترهای مکانیکی در طی زمان می‌توان فرض کرد $\dot{\tilde{\alpha}}_i = \dot{\hat{\alpha}}_i$. بنابراین کنترلر بصورت رابطه (11) بدست می‌آید:

$$T_v = -\hat{\alpha}_1\ x_6^2 - \hat{\alpha}_2\, x_4^2 - \hat{\alpha}_3 + \hat{\alpha}_4(\dot{x}_5^* - c_1 \dot{e}_2) - k_1\, \mathrm{sgn}(s_1) - k_2\, s_1 \quad (11)$$

و قوانین پارامترهای تطبیقی به صورت روابط (12-15) خواهند بود:

$$\dot{\hat{\alpha}}_1 = \lambda_{11} s_1 (x_6^* + e_6)^2 \quad (12)$$

$$\dot{\hat{\alpha}}_2 = \lambda_{12} s_1 (x_4^* + e_4)^2 \quad (13)$$

$$\dot{\hat{\alpha}}_3 = \lambda_{13} s_1 \quad (14)$$

$$\dot{\hat{\alpha}}_4 = -\lambda_{14} s_1 (\dot{x}_5^* - c_1 e_5) \quad (15)$$

که در آنها λ_{11} ، λ_{12}، λ_{13} و λ_{14} پارامترهای طراحی و مثبت هستند.

3-2- کنترل دینامیک صفر

متغیرهای موقعیت طولی و زاویه انحراف شاسی را باید تنها با یک ورودی T_v کنترل کرد. برای حل مسأله کمبود عملگر، می‌توان زیرسیستم دینامیک صفر را با قرار دادن خطای موقعیت طولی یعنی $e_2 = x_2 - x_2^*$ برابر با صفر و سپس با قرار دادن $\dot{e}_5 = 0$ بدست آورد. از معادله (6) T_v به صورت رابطه (16) بدست می‌آید:

$$T_v = -\frac{\Lambda_u}{X_u} x_6^2 - \frac{\Psi_u}{X_u}\ x_4^2 - \frac{\Phi_u}{X_u} g + \frac{\dot{x}_5^*}{X_u} \quad (16)$$

با قرار دادن T_v در $\dot{e}_4$ و استفاده از $\dot{x}_4 = \dot{e}_4 + \dot{x}_4^*$ زیرسیستم دینامیک صفر به صورت (17) بدست می‌آید:

$$\dot{x}_4 = \left(\Lambda_\gamma - \frac{X_\gamma \Lambda_u}{X_u}\right) x_6^2 - \frac{C_u}{A_\gamma} g + \frac{X_\gamma \dot{x}_5^*}{X_u} \quad (17)$$

هدف کنترلی از طراحی کنترلر دینامیک صفر پیدا کردن $\dot{x}_5^*$ مناسب به عنوان ورودی برای کنترلر طولی یعنی T_v است. سطح لغزش برای زیرسیستم دینامیک صفر به صورت رابطه (18) تعریف می شود:

$$s_2 = \dot{e}_1 + c_2 e_1 \quad (18)$$

که در آن c_2 ثابت و مثبت است. سپس می‌توان از سطح لغزش نسبت به زمان مشتق گرفت:

$$\dot{s}_2 = \ddot{e}_1 + c_2 \dot{e}_1 = \left(\Lambda_\gamma - \frac{X_\gamma \Lambda_u}{X_u}\right) {x_6}^2 - \frac{C_u}{A_\gamma} g + \frac{X_\gamma \dot{x}_5^*}{X_u} - \dot{x}_4^* + c_2 \dot{e}_1 \quad (19)$$

با اعمال قانون نمایی یعنی $\dot{s}_2 = -k_3 \mathrm{sgn}(s_2) - k_4 s_2$ کنترلر را می‌توان به صورت رابطه (20) طراحی کرد:

$$\dot{x}_5^* = \frac{X_u}{X_\gamma}[\left(\frac{X_\gamma \Lambda_u}{X_u} - \Lambda_\gamma\right) {x_6}^2 + \frac{C_u}{A_\gamma} g + \dot{x}_4^* - c_2 \dot{e}_1 - k_3 \mathrm{sgn}(s_2) - k_4 s_2] \quad (20)$$

که در آن k_3 و k_4 ثوابت طراحی و مثبت هستند. مشابه حالت قبل مقادیر واقعی پارامترهای مکانیکی در دسترس نیستند و باید پارامترهای جدید $\beta_1 = \Lambda_u - \Lambda_\gamma X_u/X_\gamma$، $\beta_2 = (C_u/A_\gamma)(X_u/X_\gamma)\,g$ و $\beta_3 = X_u/X_\gamma$ را تعریف کرد که $\hat{\beta}_i$ تخمینی از $\beta_i (i = 1,2,3)$ است، همچنین خطای تخمین به صورت $\tilde{\beta}_i = \hat{\beta}_i - \beta_i$ تعریف می‌شود. با در نظر گرفتن تغیرات آرام پارامترهای مکانیکی می‌توان فرض کرد $\dot{\tilde{\beta}}_i = \dot{\hat{\beta}}_i$. در این شرایط $\dot{s}_2$ برابر می‌شود با:

$$\dot{s}_2 = -\frac{\beta_1}{\beta_3} x_6^2 - \frac{\beta_2}{\beta_3} + \frac{\dot{x}_5^*}{\beta_3} - \dot{x}_4^* + c_2 \dot{e}_1 \quad (21)$$

سپس کنترلر تطبیقی برای زیر سیستم صفر را می‌توان از رابطه (22) بدست آورد:

1- Exponential approach law

$$\dot{x}_5^* = \hat{\beta}_1 x_6^2 + \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3(\dot{x}_4^* - c_2\dot{e}_1) - k_3\text{sgn}(s_2) - k_4 s_2 \quad (22)$$

و قوانین تطبیقی به صورت روابط (23-25) تعریف می‌شوند:

$$\dot{\hat{\beta}}_1 = -\lambda_{21} s_2 x_6^2 \quad (23)$$

$$\dot{\hat{\beta}}_2 = -\lambda_{22} s_2 \quad (24)$$

$$\dot{\hat{\beta}}_3 = -\lambda_{23} s_2(\dot{x}_4^* - c_2 e_4) \quad (25)$$

که در آن λ_{21}، λ_{22} و λ_{23} پارامترهای طراحی و مثبت هستند.

3-3- طراحی کنترلر حرکت دورانی

در این بخش هدف طراحی کنترلری است که به ربات دوچرخ اجازه دهد تا مسیر دلخواه را دنبال کند. در زیرسیستم-دورانی زاویه دورانی x_3 به طور مستقیم توسط گشتاور T_w کنترل می‌شود. سطح لغزش برای کنترل دورانی به صورت روابط (26،27) تعریف می‌شود:

$$s_3 = \dot{e}_3 + c_3 e_3 \quad (26)$$

$$\dot{s}_3 = \ddot{e}_3 + c_3\dot{e}_3 = \Lambda_\theta\ x_5x_6 + \Psi_\theta\ x_4x_6 + X_\theta T_w - \dot{x}_6^* + c_3\dot{e}_3 \quad (27)$$

با اعمال قانون نمایی یعنی $\dot{s}_3 = -k_5\text{sgn}(s_3) - k_6 s_3$ کنترلر را می‌توان به صورت رابطه (28) طراحی کرد:

$$T_w = -\frac{\Lambda_\theta}{X_\theta}\ x_5x_6 - \frac{\Psi_\theta}{X_\theta}x_4x_6 + \frac{1}{X_\theta}\ \dot{x}_6^* - \frac{c_3}{X_\theta}\ \dot{e}_3 - \frac{k_5}{X_\theta}\text{sgn}(s_3) - \frac{k_6}{X_\theta}\ s_3 \quad (28)$$

که k_5 و k_6 پارامترهای طراحی و مثبت هستند. باید توجه داشت که پارامترهای مکانیکی موجود در (28) را به صورت دقیق نمی‌توان بدست آورد و در عمل ممکن است کنترلر پاسخ مناسبی ندهد. بنابراین پارامترهای تطبیقی به صورت: $\kappa_1 = \Lambda_\theta / X_\theta$، $\kappa_2 = \Psi_\theta / X_\theta$ و $\kappa_3 = 1/X_\theta$ تعریف می‌شوند که $\hat{\kappa}_i$ تخمینی از $\kappa_i\ (i = 1,2,3)$ است. از آن گذشته، خطای تخمین به صورت $\tilde{\kappa}_i = \hat{\kappa}_i - \kappa_i$ تعریف می‌شود که به‌دلیل تغییرات آرام پارامترهای مکانیکی در طی زمان می‌توان فرض کرد $\dot{\tilde{\kappa}}_i = \dot{\hat{\kappa}}_i$. بنابراین می‌توان کنترلر تطبیقی را بصورت رابطه (29) نوشت:

$$T_w = -\hat{\kappa}_1\ x_5x_6 - \hat{\kappa}_2 x_4x_6 + \hat{\kappa}_3\ \dot{x}_6^* - c_3\hat{\kappa}_3\ \dot{e}_3 - k_5\text{sgn}(s_3) - k_6\ s_3 \quad (29)$$

و قوانین تطبیقی به صورت روابط (30-32) خواهند بود:

$$\dot{\hat{\kappa}}_1 = \lambda_{31} s_3(x_6^* + e_6)(x_5^* + e_5) \quad (30)$$

$$\dot{\hat{\kappa}}_2 = \lambda_{32} s_3(x_4^* + e_4)(x_6^* + e_6) \quad (31)$$

$$\dot{\hat{\kappa}}_3 = -\lambda_{33} s_3(\dot{x}_6^* - c_3 e_6) \quad (32)$$

که در آنها λ_{31} ، λ_{32} و λ_{33} پارامترهای طراحی و مثبت هستند. با توجه به تحلیل‌های بالا قضیه زیر را می‌توان بیان کرد.

قضیه 1: سیستم (6)، (7) و (17) را با کنترلر مود لغزشی- تطبیقی (11)، (22) و (29) و قوانین تطبیقی (12-15)، (23-25) و (30-32) در نظر گرفته می‌شود. خطاها به صورت نمایی به سمت صفر میل می‌کنند، یعنی:

$$\lim_{t\to\infty}|e_i| = 0 \quad (i = 1, \dots, 6) \quad (33)$$

اثبات: تابع کاندیدای لیاپانوف کل سیستم برابر با V تعریف می‌شود (رابطه (34):

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \quad (34)$$

که در آن می‌توان روابط (35-37) را نوشت:

$$V_1 = \frac{1}{2}\alpha_4 s_1^2 + \frac{1}{2\lambda_{11}}\tilde{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2\lambda_{12}}\tilde{\alpha}_2^2 + \frac{1}{2\lambda_{13}}\tilde{\alpha}_3^2 + \frac{1}{2\lambda_{14}}\tilde{\alpha}_4^2 \quad (35)$$

$$V_2 = \frac{1}{2}\beta_3 s_2^2 + \frac{1}{2\lambda_{21}}\tilde{\beta}_1^2 + \frac{1}{2\lambda_{22}}\tilde{\beta}_2^2 + \frac{1}{2\lambda_{23}}\tilde{\beta}_3^2 \quad (36)$$

$$V_3 = \frac{1}{2}\kappa_3 s_3^2 + \frac{1}{2\lambda_{31}}\tilde{\kappa}_1^2 + \frac{1}{2\lambda_{32}}\tilde{\kappa}_2^2 + \frac{1}{2\lambda_{32}}\tilde{\kappa}_3^2 \quad (37)$$

واضح است که V مثبت معین است.

از طرفی با تعریف α_1، α_2 ، α_3 و α_4 تابع $\dot{s}_1$ به صورت (38)، با تعریف β_1، β_2 و β_3 تابع $\dot{s}_2$ به صورت (39) و با تعریف κ_1، κ_2 و κ_3 تابع $\dot{s}_3$ به صورت (40) بدست می‌آیند:

$$\dot{s}_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_4}x_6^2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_4}x_4^2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_4}g + \frac{1}{\alpha_4}T_v - \dot{x}_5^* + c_1\dot{e}_2 \quad (38)$$

$$\dot{s}_2 = -\frac{\beta_1}{\beta_3}\ x_6^2 - \frac{\beta_2}{\beta_3} + \frac{\dot{x}_5^*}{\beta_3} - \dot{x}_4^* + c_2\dot{e}_1 \quad (39)$$

$$\dot{s}_3 = \frac{\kappa_1}{\kappa_3}x_5x_6 + \frac{\kappa_2}{\kappa_3}x_4x_6 + \frac{1}{\kappa_3}T_w - \dot{x}_6^* + c_3\dot{e}_3 \quad (40)$$

با مشتق‌گیری V نسبت به زمان رابطه (41) بدست می‌آید:

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 \quad (41)$$

که در آن $\dot{V}_1$ با در نظر گرفتن تقریب $\dot{\hat{\alpha}} = \dot{\tilde{\alpha}}$ برابر می‌شود با:

$$\dot{V}_1 = \alpha_4 s_1\dot{s}_1 + \frac{1}{\lambda_{11}}\tilde{\alpha}_1\dot{\hat{\alpha}}_1 + \frac{1}{\lambda_{12}}\tilde{\alpha}_2\dot{\hat{\alpha}}_2 + \frac{1}{\lambda_{13}}\tilde{\alpha}_3\dot{\hat{\alpha}}_3 + \frac{1}{\lambda_{14}}\tilde{\alpha}_4\dot{\hat{\alpha}}_4 \quad (42)$$

و با جایگذاری (12-15) و (38) در (42)، رابطه (43) بدست می‌آید:

$$\dot{V}_1 = -k_1|s_1| - k_2 s_1^2 \quad (43)$$

به طور مشابه با در نظر گرفتن تقریبهای $\dot{\hat{\beta}} = \dot{\tilde{\beta}}$ و $\dot{\hat{\kappa}} = \dot{\tilde{\kappa}}$، $\dot{V}_2$ و $\dot{V}_3$ برابر می‌شوند با:

$$\dot{V}_2 = -k_3|s_2| - k_4 s_2^2 \quad (44)$$

$$\dot{V}_3 = -k_5|s_3| - k_6 s_3^2 \quad (45)$$

و بنابراین $\dot{V}$ برابر می‌شود با:

$$\dot{V} = -k_1|s_1| - k_2 s_1^2 - k_3|s_2| - k_4 s_2^2 - k_5|s_3| - k_6 s_3^2 \quad (46)$$

از آنجا که $\dot{V}$ منفی نیمه معین است، برای ادامه روند اثبات، لم 1 به صورت زیر ارائه می‌شود.

لم 1: نقطه تعادل صفر برای سیستم (6)، (7) و (17) با کنترلر مود لغزشی تطبیقی (11)، (22) و (29) و قوانین تطبیقی (12-15)، (23-25) و (30-32) در نظر گرفته می‌شوند. مشتق تابع $\dot{V}(t)$ به سمت صفر میل می‌کند، یعنی:

$$\lim_{t\to\infty}\dot{V}(t) = 0$$

اثبات: با در نظرگرفتن انتگرال $\dot{V}(t)$ رابطه (47) بدست می‌آید:

$$I = \int_0^\infty -\dot{V}(t)\,dt = V(0) - V(\infty) \quad (47)$$

با توجه به اینکه $\dot{V}$ منفی نیمه معین است، لذا $V(t)$ در طی زمان تابعی کاهشی است و از آنجا که $V(t)$ تابعی مثبت است، در نتیجه $V(\infty)$ محدود است ($V(0) \geq V(\infty)$).

یک شرط کافی برای اینکه تابعی به صورت یکنواخت پیوسته باشد، این است که مشتق آن محدود باشد. (روابط 48،49):

$$\ddot{V} = -k_1\frac{\dot{s}_1}{|s_1|} - 2k_2\dot{s}_1 s_1 - k_3\frac{\dot{s}_2}{|s_2|} - 2k_4\dot{s}_2 s_2 - k_5\frac{\dot{s}_3}{|s_3|} - 2k_6\dot{s}_3 s_3 \quad (48)$$

$$\ddot{V} \leq k_1 + k_3 + k_5 + 2k_2k_1 s_1\text{sgn}(s_1) + 2k_2k_2 s_1^2 + 2k_4k_3 s_2\text{sgn}(s_2) + 2k_4k_4 s_2^2 + 2k_6k_5 s_3\text{sgn}(s_3) + 2k_6k_6 s_3^2 \quad (49)$$

با در نظرگرفتن انتگرال $s_k(t)\ (k = 1,2,3)$ رابطه (50) بدست می‌آید:

$$I_k = \int_0^{\infty} -\dot{s}_k(t)\,dt = s_k(0) - s_k(\infty) \quad (k = 1,2,3) \tag{50}$$

با توجه به اینکه $\dot{s}_k(t)$ $(k = 1,2,3)$ منفی هستند، لذا $s_k(t)$ در طی زمان توابعی کاهشی هستند و در نتیجه $s_k(\infty)$ $(k = 1,2,3)$ محدود هستند و همواره روابط زیر برقرارند:

$$s_k(0) \geq s_k(t) \qquad \text{برای هر } t \geq 0 \qquad (k{=}1,2,3)$$

بنابراین می‌توان رابطه (51) را نوشت:

$$\begin{aligned}\ddot{V} \leq k_1 + k_3 + k_5 &+ 2k_2k_1|s_1(0)| + 2k_2k_2 s_1(0)^2 \\ &+ 2k_4k_3|s_2(0)| + 2k_4k_4 s_2^2 \\ &+ 2k_6k_5|s_3(0)| + 2k_6k_6 s_3(0)^2\end{aligned} \tag{51}$$

مشاهده می‌شود که $\ddot{V}$ محدود است و بنابراین $\dot{V}$ به صورت یکنواخت پیوسته است. بنابراین شرایط لم باربالت مهیا است و داریم:

$$\lim_{t\to\infty} \dot{V}(t) = 0 \tag{52}$$

بنابراین اثبات لم کامل شد. با توجه به قضیه لاسال و درستی فرض‌های زیر:

$$\dot{V} \leq 0$$
$$\lim_{t\to\infty} \dot{V}(t) = 0$$

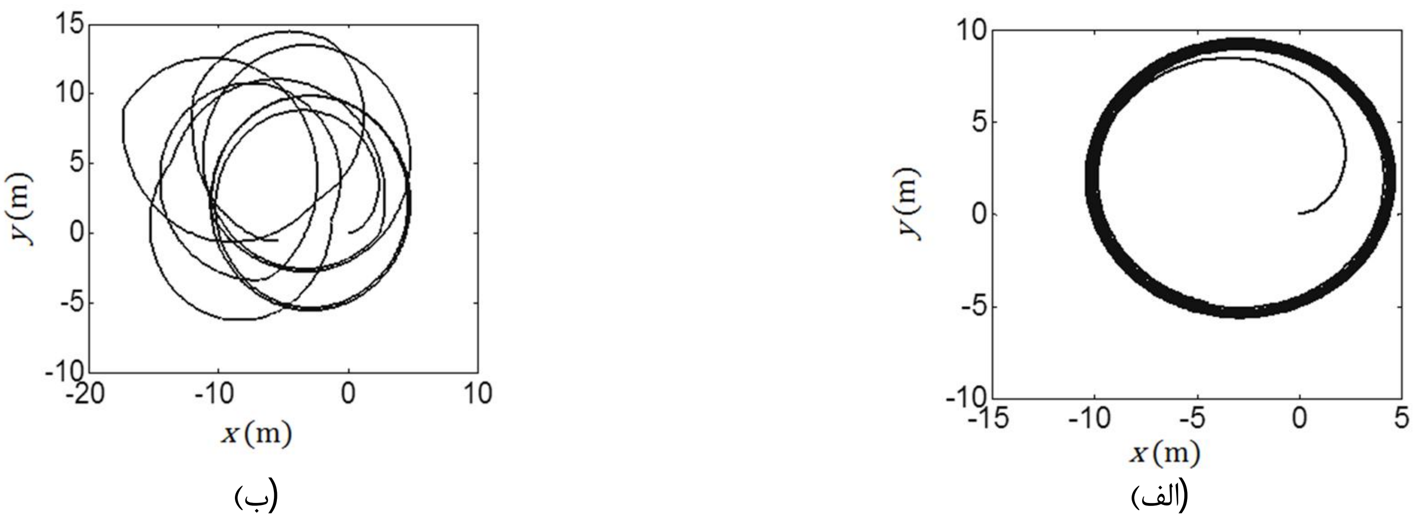
تمام حل‌ها به صورت مجانبی فراگیر پایدار هستند، یعنی:

$$\lim_{t\to\infty} |e_i| = 0 \quad (i = 1, \dots, 6) \tag{53}$$

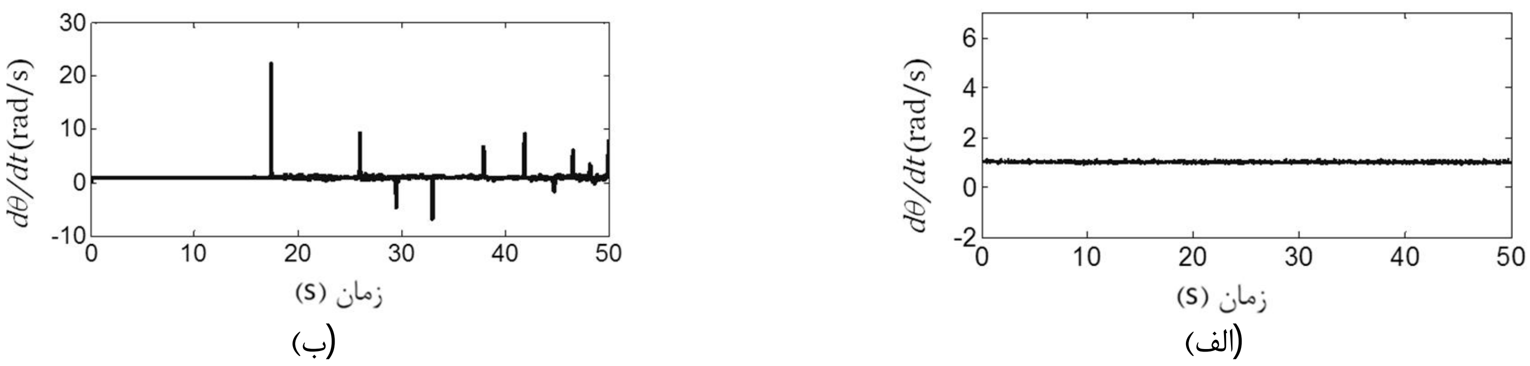
و در نتیجه قضیه 1 اثبات می‌شود

4- نتایج شبیه سازی

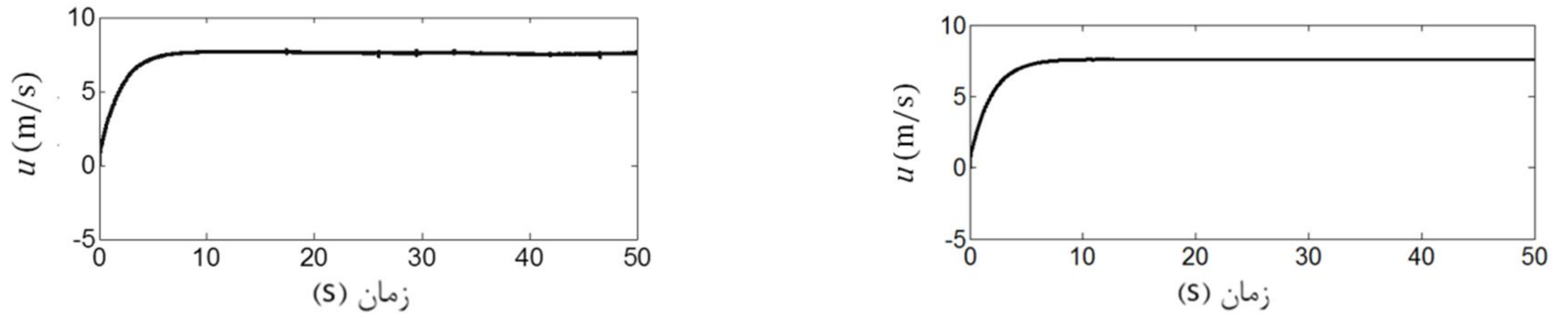
برای اعتبارسنجی قوانین کنترلی ارائه شده، شبیه‌سازی‌هایی در این بخش ارائه شده است. در این شبیه‌سازی‌ها شرایط اولیه برابر با $x_0 = 0\,\text{m}$، $y_0 = 0\,\text{m}$، $\theta_0 = 0\,\text{rad}$، $\dot{\theta}_0 = 0\,\text{rad/s}$، $\gamma_0 = \frac{\pi}{4}\,\text{rad}$، $\dot{\gamma}_0 = 0\,\text{rad/s}$ و $u_0 = 0\,\text{m/s}$ در نظرگرفته شده است. مقدار مطلوب زاویه انحراف بدنه و سرعت زاویه‌ای انحراف بدنه از وضعیت تعادل برابر با صفر یعنی $\gamma_d = 0\,\text{rad}$ و $\dot{\gamma}_d = 0\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ و مقدار مطلوب سرعت زاویه‌ای دورانی برابر با $\dot{\theta}_d = 1\,\text{rad/s}$ در نظر گرفته شده است. برای حصول به هدف کنترلی ضرایب کنترلی به صورت $k_1 = 0.4$ ، $k_2 = 0.2$ ، $k_3 = 3$ ، $k_4 = 5$ ، $k_5 = 0.5$ ، $k_6 = 0.2$، $c_1 = c_2 = c_3 = 0.4$ ، $\lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{31} = \lambda_{32} = \lambda_{33} = 5$ و $\lambda_{21} = \lambda_{22} = \lambda_{23} = 10$ در نظر گرفته می‌شوند. برای مطالعه اثر ترم $m_{ch}h\dot{\theta}\,u\,\sin\gamma'$ دو شبیه‌سازی انجام شده است. در شبیه‌سازی اول کنترلر طراحی شده بر مبنای مدل بهبودیافته به مدل بهبود یافته اعمال گردید (شکل‌های 3- الف تا 9- الف) و در شبیه‌سازی دوم کنترلری بر مبنای مدل مرسوم بر مدل بهبودیافته اعمال شده است (شکل‌های 3- ب تا 9- ب). کنترلر دوم دقیقاً مشابه کنترلر اول است با این تفاوت که T_w در کنترلر مربوط به مدل مرسوم دارای ترم $' - \hat{\kappa}_1\,\dot{\theta}u'$ نمی‌باشد. مسیر حرکت ربات در صفحه x-y در شکل 3 آمده و در شکل 4 سرعت زاویه‌ای دوران بدنه در صفحه افق نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که کنترلر مود لغزشی به خوبی توانسته سرعت زاویه‌ای بدنه را به 1 rad/s برساند که این امر باعث می‌شود سیستم در صفحه افق مسیر دایروی را بپیماید. در شکل 5 سرعت خطی بدنه آورده شده است. شکل‌های 6 و 7 به ترتیب نمایش‌دهنده زاویه و سرعت زاویه‌ای انحراف بدنه از وضعیت تعادل می‌باشند و به خوبی به سمت صفر میل می‌کنند. گشتاور خروجی موتور سمت راست در شکل 8 و گشتاور خروجی موتور سمت چپ در شکل 9 نمایش داده شده است. نتایج نشان می‌دهند که اگر کنترلری بر مبنای مدل بهبودیافته طراحی شود و به مدل بهبود یافته اعمال شود، زاویه انحراف ربات پایدار باقی می‌ماند (شکل 6- الف) و ربات دایره مطلوب را دنبال می‌کند (شکل‌های 3- الف تا 4- الف). اما اگر ترم $m_{ch}h\dot{\theta}\,u\,\sin\gamma'$ در طراحی کنترلر در نظر گرفته نشود، زاویه انحراف ربات پایدار می‌ماند و به مقدار مطلوب می‌رسد (شکل 6- ب)، اما سیستم نمی‌تواند مسیر مطلوب را در صفحه x-y دنبال کند (شکل‌های 3- ب تا 4- ب).همچنین گشتاورهای خروجی موتورها، در حالت (ب) در لحظاتی، به صورت نامطلوبی، بیش از حالت (الف) می‌باشند. همان‌طور که نشان داده شد، وجود ترم $m_{ch}h\dot{\theta}\,u\,\sin\gamma'$ بر روی مسیر حرکت سیستم تأثیر بسزایی دارد و اگر این ترم در نظر گرفته نشود، کنترلر عملکرد مناسبی نخواهد داشت.



شکل 3 تعقیب مسیر ربات در صفحه افقی x–y الف) برای مدل بهبود یافته و کنترلر بهبود یافته ب) برای مدل بهبود یافته و کنترلری بر مبنای مدل مرسوم

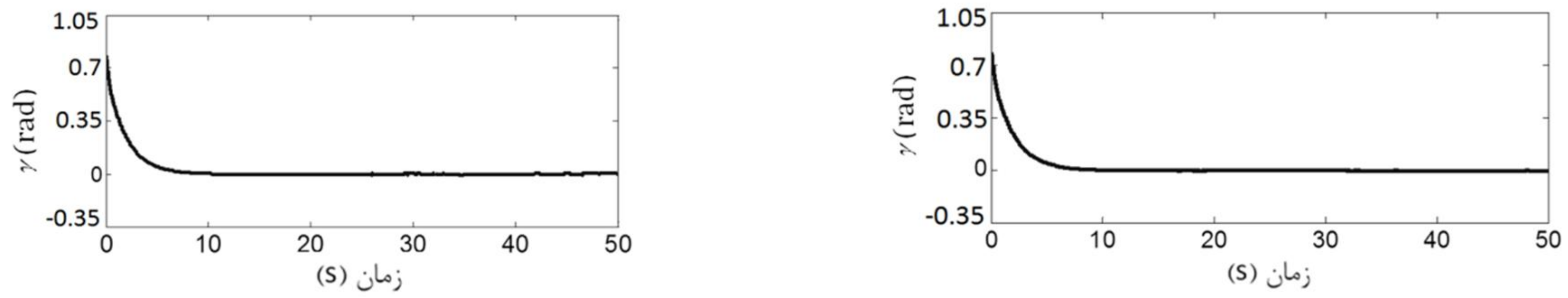


شکل 4 سرعت زاویه‌ای بدنه در صفحه الف) برای مدل بهبود یافته و کنترلر بهبود یافته ب) برای مدل بهبود یافته و کنترلری بر مبنای مدل مرسوم



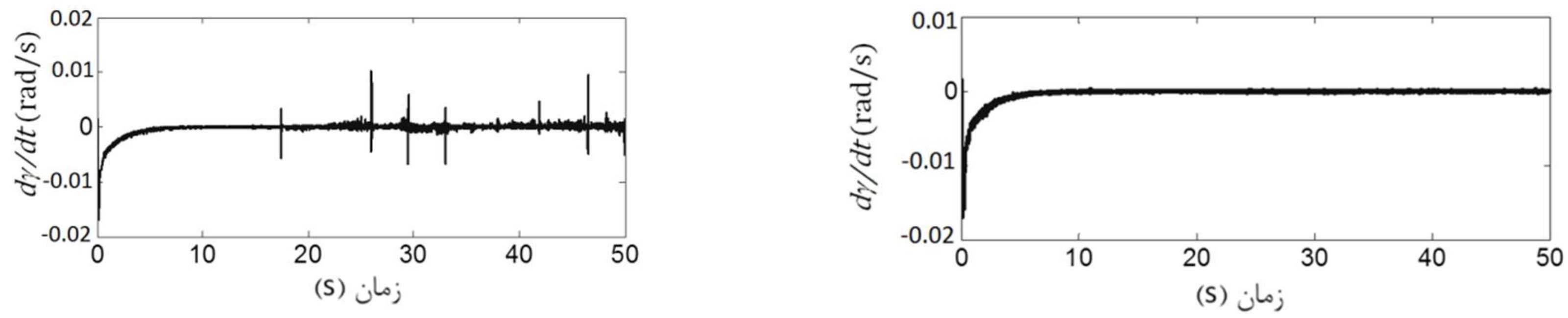
(الف) (ب)

شکل 5 سرعت طولی بدنه الف) برای مدل بهبود یافته و کنترلر بهبود یافته ب) برای مدل بهبود یافته و کنترلری بر مبنای مدل مرسوم



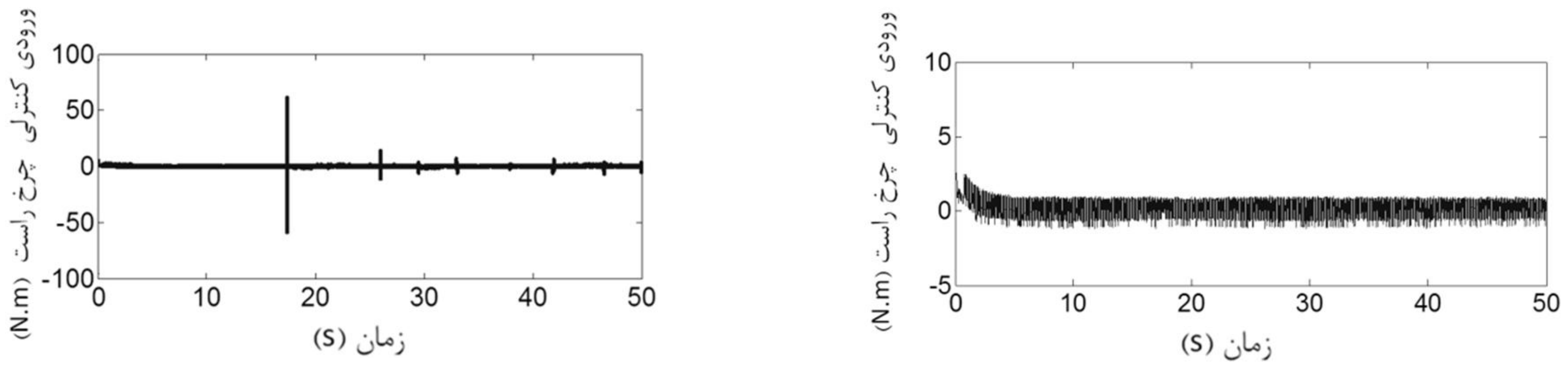
(الف) (ب)

شکل 6 زاویه انحراف بدنه از حالت عمود الف) برای مدل بهبود یافته و کنترلر بهبود یافته ب) برای مدل بهبود یافته و کنترلری بر مبنای مدل مرسوم



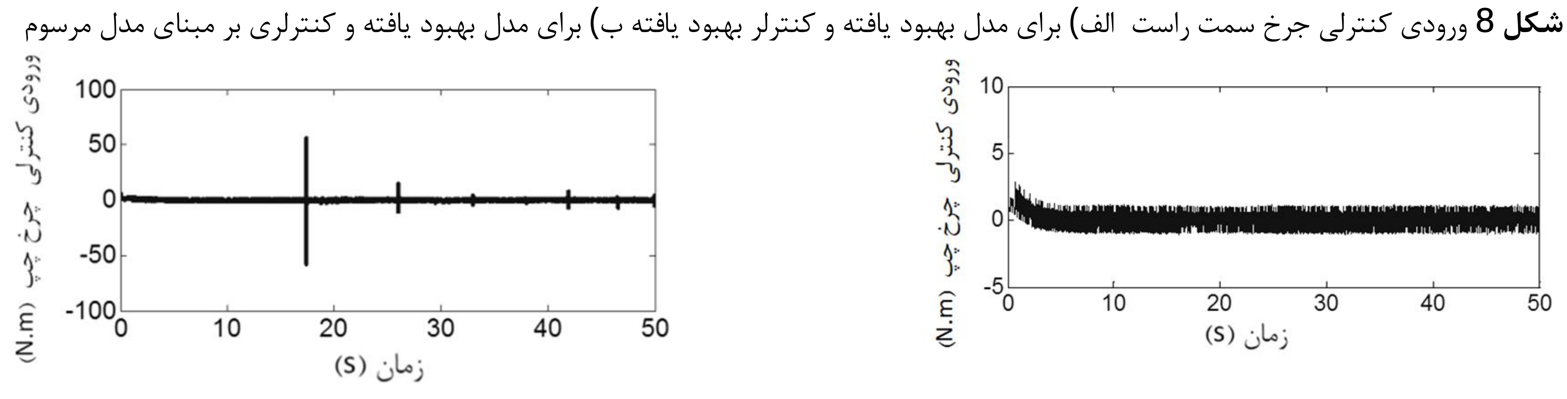
(الف) (ب)

شکل 7 سرعت زاویه‌ای انحراف بدنه از حالت عمود الف) برای مدل بهبود یافته و کنترلر بهبود یافته ب) برای مدل بهبود یافته و کنترلری بر مبنای مدل مرسوم



(الف) (ب)

شکل 8 ورودی کنترلی چرخ سمت راست الف) برای مدل بهبود یافته و کنترلر بهبود یافته ب) برای مدل بهبود یافته و کنترلری بر مبنای مدل مرسوم



(الف) (ب)

شکل 9 ورودی کنترلی چرخ سمت چپ الف) برای مدل بهبود یافته و کنترلر بهبود یافته ب) برای مدل بهبود یافته و کنترلری بر مبنای مدل مرسوم

5- نتیجه‌گیری

در این مقاله به کنترل مود لغزشی-تطبیقی ربات تعادلی دوچرخ با استفاده از معادلات دینامیکی بهبود یافته و بر مبنای دینامیک صفر پرداخته شده است. ربات تعادلی دوچرخ را می‌توان با یک مجموعه از معادلات دیفرانسیل غیرخطیِ وابسته نمایش داد. در پژوهشی که پیش از این توسط نویسنده مقاله انجام شده است، معادلات دینامیکی بهبودیافته ربات دوچرخ بدست آمده و اعتبارسنجی شده است. معادلات دینامیکی بدست‌آمده، دارای اختلافاتی نسبت به معادلات پیشین می‌باشد. عمده‌ترین اختلاف وجود یک ترم غیرخطی است که محققان در گذشته آن را نادیده گرفته‌اند. در این مقاله نشان داده شده است که اگر ترم غیرخطی در طراحی کنترلر در نظر گرفته شود، تأثیر بسزایی در رفتار سیستم مدار بسته خواهد داشت. کنترلر مود لغزشی- تطبیقی به‌گونه‌ای طراحی شده است که می‌تواند بدنه ربات را در وضعیت تعادل نگاه دارد و کنترل دورانی مطلوب را نیز برای ربات برآورده

سازد. در این مقاله، کنترل سرعت روبه جلو با پروفیلی مشخص مدنظر نیست و این مسأله در پژوهش‌های آتی مورد توجه قرار خواهد گرفت. پایداری سیستم مدار بسته به صورت مجانبی فراگیر، با استفاده از تئوری پایداری لیاپانوف، لم باربالت و قضیه مجموعه‌های ناوردا لاسال اثبات شده است. نتایج شبیه‌سازی کارآمدی کنترلر ارائه شده را نشان می‌دهند. همچنین نشان داده شد وجود ترم $'m_{ch}h\dot{\theta}\, u\, \sin\gamma'$ بر روی مسیر حرکت سیستم تأثیر بسزایی دارد و اگر این ترم در طراحی کنترلر در نظر گرفته نشود، کنترلر عملکرد مناسبی نخواهد داشت.

6- مراجع

[1] F. Grasser, A. D'Arrigo, S. Colombi, A. Rufer, JOE: A mobile, inverted pendulum, *IEEE Trans. Ind. Electron,* Vol. 49, No. 1, pp. 107–114, 2002.

[2] L. Vermeiren, A. Dequidt, T. M. Guerra, H. Rago-Tirmant, M. Parent, Modeling, control and experimental verification on a two-wheeled vehicle with free inclination: Anurban transportation system, *Control Engineering Practice,* Vol. 19, No. 7, pp. 744–756, 2011.

[3] Segway Inc., Reference manual, Segway personal transporter (PT), Segway Inc, Bedford, NH, 2006.

[4] A. Salerno, J. Angeles, On the nonlinear controllability of a quasi holonomic mobile robot, Taiwan: *Proc. IEEE ICRA,* pp. 3379–3384, 2003.

[5] K. Goher, S. Ahmad, O. M. Tokhi, A new configuration of two wheeled vehicles: towards a more workspace and motion flexibility. *4th system conference,* San Diego, CA, 2010.

[6] S. Jeong, T. Takahashi, Wheeled inverted pendulum type assistant robot: inverted mobile, standing, and sitting motions. *Proceedings of the 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems,* San Diego, CA, 2007.

[7] Ch. Xu, M. Li, The system design and LQR control of a two-wheels self-balancing mobile robot, *Electrical and Control Engineering (ICECE), 2011 International Conference on,* pp. 2786-2789. IEEE, 2011.

[8] M. T. Kang, H. D. Vo, Control system design for a mobile inverted pendulum via sliding mode technique, *Proceedings of International Conference on Mechatronics,* Kumamoto Japan, 2007.

[9] S.C. Lin, C.C. Tsai, H.C. Huang, Adaptive robust self-balancing and steering of a two wheeled human transportation Vehicle, *Journal of Intelligent & Robotic Systems,* Vol. 62, No. 1, pp.103-123, 2011.

[10] K.H. Su, Y.Y. Chen, S.F. Su, Design of neural-fuzzy-based controller for two autonomously driven wheeled robot, *Neurocomputing,* Vol. 73, No. 13, pp. 2478-2488, 2010.

[11] T. Ren, T. Che, Motion control for a two-wheeled vehicle using a self-tuning PID controller, *Control Engineering Practice,* Vol. 16, No. 3, pp. 365–375, 2008

[12] A. Maddahi, A. H. Shamekhi, A. Ghaffari, A Lyapunov controller for self-balancing two-wheeled vehicles, *Robotica,* Vol. 33, No. 1, 225-239, 2015.

[13] S. R. Larimi, S. A. Moosavian, Dynamic balancing of an under-actuated differential two wheeled manipulator by a reaction wheel, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 13, No. 8, pp. 79-92, 2013. (In Persian)

[14] S. R. Larimi, P. Zarafshan, S. A. Moosavian, "A new stabilization algorithm for a two-wheeled mobile robot aided by reaction wheel, *Journal of Dynamic Systems, Measurement,* and *Control,* Vol. 137, No. 1, ,011009, 2015.

[15] Y. Kim, S. H. Kim, Y. K. Kwak, Dynamic analysis of a nonholonomic two-wheeled inverted pendulum robot, *J. Intelligent and Robotic Systems,* Vol. 44, No. 1, pp. 25–46, 2005.

[16] A. Shariati, A. Ghaffari, A. H. Shamekhi, Paths of two-wheeled self-balancing vehicles in the horizontal plane, *Second RSI/ISM International Conference on Robotics and Mechatronics (ICRoM),* pp. 456-461. IEEE, 2014.

[17] A. Shariati, A. Ghaffari, A. H. Shamekhi, Dynamical modeling of a two-wheeled self-balancing vehicle using Lagrangian approach, *22th International Conference on Mechanical Engineering, ISME 2013,* Tehran, 2013. (in Persian)

[18] M. Yue, X. Wei, Z. Li, Adaptive sliding-mode control for two-wheeled inverted pendulum vehicle based on zero-dynamics theory, Nonlinear Dynamics, Vol. 76, No. 1, 459-471, 2014.